Übungsstunde Analysis 2:

Heutige Themen:

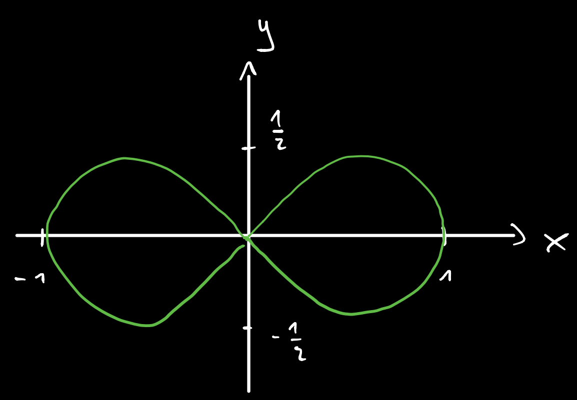
- Implizite Funktionen
- Repetition Jacobimatrix
- Verallgemeinerung mehrdimensionale Kettenregel
- Beispiel zu Taylorpolynomen

Implizite Funktionen & implizites Funktionentheorem:

Ziel: Gegeben ist eine (i.A. nicht lineare) Gleichung oder ein Gleichungssystem

$$f(x,y) = x^2(1-x^2) - y^2 = 0$$

Auflösen nach x bzw. y ergibt eine Funktion $y = g(x)$ bzw. $x = h(y)$



Bem: Abgebildet ist die gesamte Nullstellenmenge, wenn wir im folgenden also davon sprechen, eine explizite Darstellung der Funktion in einer Umgebung einer Nullstelle von f zu finden, dann kann das eine Umgebung irgend eines Punktes auf dem gezeichneten Graphen sein (Einfachheitshalber betrachten wir nur $(0,0)$ & $(\pm 1, 0)$)

Wollen wissen:

- Existieren g, h lokal (d.h. für $x, y \in U$, U eine kleine Umgebung einer Nullstelle von f.
- Sind g, h diffbar, was ist ggf. die Ableitung

Zu beachten:

- Für $|x| < 1$, $x \neq 0$ gibt es genau 2 Lösungen für y von $f(x,y) = 0$. Für $|y| < \frac{1}{2}$, $y \neq 0$ gibt es genau 4 Lösungen für x.
- In keiner Umgebung des Ursprungs existiert eine lokale eindeutige Auflösung der Gleichung.

Bemerke:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) &= 2x(1-x^2) - x^2(2x) \Big|_{(x,y)=(0,0)} = \underline{0} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) &= -2y \Big|_{(x,y)=(0,0)} = \underline{0} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \underline{\text{keine}} \\ \text{expl.} \\ \text{Darstellung} \end{array}$$

- In keiner Umgebung von $(\pm 1, 0)$ gibt es eine eindeutige Auflösung der Form $y = g(x)$, aber es gibt eine Auflösung der Form $x = h(y)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(1,0) = \underline{-2} \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Eine expl. Darstellung } x = h(y) \text{?}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(1,0) = \underline{0}$$

$\hookrightarrow$ Keine expl. Darstellung $y = g(x)$?

Allgemeiner Fall: Wir interessieren uns für $y = g(x)$

$$f: U \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$(x, y) \mapsto f(x,y)$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) \mapsto \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Löse $f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$

lokal nach $y_1, y_2, \dots, y_m$ auf. Bezeichne die Lösung, falls existent, als $y = g(x)$.

Notation: Jacobi-Matrix bzw. Funktionalmatrix

$$\underbrace{f' = Df = L = J = df}_{\text{Könnt eine bel. Darstellung wählen.}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \partial_{x_1} f_1 & \cdots & \partial_{x_k} f_1 & \partial_{y_1} f_1 & \cdots & \partial_{y_m} f_1 \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_n & \cdots & \partial_{x_k} f_n & \partial_{y_1} f_n & \cdots & \partial_{y_m} f_n \end{array}\right] = [f'_x \; f'_y]$$

$$f'_x = \frac{\partial}{\partial x} f \qquad f'_y = \frac{\partial}{\partial y} f$$

Bem: Diese partiellen Ableitungen nach mehreren Variablen enthalten, analog zur gesamten Jacobimatrix, einfach die Informationen zu allen Ableitungen in dem von eben diesen Variablen aufgespannten Unterraum.

Implizites Funktionentheorem:

Sei $f: U \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung, und sei (a,b) eine NST von f, d.h. $f(a,b)=0$, $(a,b) \in U$.

Sei $f'_y(a,b)$ eine invertierbare Matrix.

Dann gibt es Umgebungen U' von a und U'' von b, und eine C^1-Abbildung $g: U' \to U''$, so dass die Nullstellenmenge von f in $U' \times U''$ genau der Graph von g ist.

$$\left(f(x,y)=0,\ (x,y) \in U' \times U''\right) \iff y = g(x)$$

Ferner gilt:

$$g'(a) = \boxed{-\left(f'_y(a,b)\right)^{-1}\left(f'_x(a,b)\right)} = -\frac{f'_x(a,b)}{f'_y(a,b)}$$

Beweisskizze für Interessierte:

Wir betrachten eine Hilfsfunktion

$$\Phi: U \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, \quad (x,y) \mapsto (x, f(x,y))$$

Dementsprechend gilt für NST jetzt $\Phi(a,b) = (a,0)$.

Wir berechnen

$$d\Phi(a,b) = \Phi'(a,b) = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{k \times k} & 0 \\ f'_x(a,b) & f'_y(a,b) \end{bmatrix}$$

Wobei $\mathbb{1}_{k\times k}$ die $k\times k$ Einheitsmatrix ist.
(Könnt euch selbst kurz überlegen, warum die totale Ableitung von dem Vektor x nach sich selbst die Einheitsmatrix ergeben muss).

Einschub inverses Funktionentheorem:

Ich weiss nicht, ob das inv. FT behandelt wurde, aber es lautet wie folgt:

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \in C^1$ und gilt

$$\det(f') = \det(df) \neq 0$$

dann ist f in einer Umgebung von x_0 ein Diffeomorphismus (bijektiv, wobei die Abbildung selbst, sowie $f^{-1} \in C^1$ sind).
⇝ Es existiert dann also eine Inverse!

(Beweis ist <u>äusserst</u> mühsam, aber das Ergebnis sollte mit euren LinAlg Kenntnissen immerhin Sinn ergeben ⇔ df darf keinen Rangverlust haben)
Ausserdem gilt dann für die Ableitung:

$$\underline{d(f^{-1})(y) = [df(x)]^{-1}}$$

Abl. der Inversen ist gerade die Inverse der Jacobi Matrix

Da nach der Voraussetzung $f'_y(a,b)$ invertierbar ist ($\det(f'_y(a,b)) \neq 0 \Rightarrow$ inv. FT), ist auch $\Phi'(a,b)$ invertierbar ($\det(\Phi'(a,b)) = f'_y(a,b) \neq 0$, da ja invertierbar!).

$\Rightarrow$ Inv. FT: Φ ist ein lokaler Diffeomorphismus in (a,b), d.h. es existiert eine Umgebung $U_0 \subset U$ von (a,b), so dass $\Phi: U_0 \to \Phi(U_0) =: V$ ein Diffeomorphismus ist. Sei Φ^{-1} die Umkehrabbildung. Dann gilt:

$$\Phi^{-1}(\xi,\eta) = (\xi, h(\xi,\eta)) \quad \left| \begin{array}{l} \xi = x \\ \eta = f(x,y) \end{array} \right\} \text{für uns!}$$

für eine C^1-Funktion h. Dann gilt

$$f(x,y) = 0 \iff \Phi(x,y) = (x,0) \iff y = h(x,0) \quad (*)$$

Insbesondere $b = h(a,0)$.

Da h stetig ist (ja sogar C^1 nach dem inv. FT) kann man immer Umgebungen U' von a sowie U'' von b wählen mit $U' \times U'' \subset U$, so dass $\forall x \in U': h(x,0) \in U''$ $\to$ Definiere $g: U' \to U''$, $\underline{g(x) = h(x,0)}$.

Wegen $(*)$ ist dies die gewünschte explizite Auflösung! $\square$

Berechnung der Ableitung:

Leite $f(x, g(x)) = 0$ ab.

Kettenregel:

$$\frac{d}{dx} f(\underbrace{x, g(x)}) = \frac{d}{dx} f(\omega(x))$$

$\omega(x)$ Hilfsfunktion fürs Verständnis $\omega(x) = \begin{bmatrix} x \\ g(x) \end{bmatrix}$

$$= \frac{d}{d\omega} f(\omega(x)) \frac{d}{dx} \omega(x) = \left[f'_x(\omega(x)) \quad f'_y(\omega(x)) \right] \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{k \times k} \\ g'(x) \end{bmatrix} = 0' = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = f'_x(\omega(x)) + f'_y(\omega(x))\, g'(x)$$

$$= f'_x(x, g(x)) + f'_y(x, g(x))\, g'(x)$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = -\left[f'_y(x, g(x)) \right]^{-1} f'_x(x, g(x))$$

Bem: In der lokalen Umgebung U'' gilt $g(x) = y$, dann kann man diese Ableitungsformel auch nutzen, ausserhalb nicht mehr!

$\rightsquigarrow$ In $x = a$, $y = g(a) = b$:

$$g'(a) = -\left[f'_y(a, b) \right]^{-1} f'_x(a, b)$$

$\square$

Bsp: Betrachte das GLS

$$f(x,y_1,y_2) = \begin{cases} f_1(x,y_1,y_2) = x^3+y_1^3+y_2^3-7 = 0 \\ f_2(x,y_1,y_2) = xy_1+y_1y_2+y_2x+2 = 0 \end{cases}$$

Ist das GLS lösbar in der Nähe der NST $(2,-1,0)$.

Hier:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3+y_1^3+y_2^3-7 \\ xy_1+y_1y_2+y_2x+2 \end{bmatrix}$$

$$f' = df = \frac{df}{d(x,y_1,y_2)} = \left[\begin{array}{c|cc} 3x^2 & 3y_1^2 & 3y_2^2 \\ y_1+y_2 & \underbrace{x+y_2 \quad x+y_1}_{f'_y} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow f'_y(2,-1,0) = \begin{bmatrix} 3y_1^2 & 3y_2^2 \\ x+y_2 & x+y_1 \end{bmatrix}\Bigg|_{(x,y_1,y_2)=(2,-1,0)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Invertierbar? $\rightsquigarrow \det(f'_y(2,-1,0)) = 3 \neq 0 \rightarrow$ ja

$\Rightarrow$ Impl. FT.: In einem kleinen Intervall um 2 gibt es eine C^n-Funktion $g: I \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, so dass

$$g_1(2) = \underline{-1}, \quad g_2(2) = \underline{0}, \quad \text{und}$$

$$f_j(x, g_1(x), g_2(x)) = 0 \quad \forall x \in I, \; j = 1,2$$

Kettenregel:

Repetition Tipps Serie 4: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$

$(\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t))$

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Bem: Gedacht für "Skalarfelder" $\Leftrightarrow$ f nur 1D output

Allgemeinere Kettenregel: $f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$(x,y) \mapsto f(x,y)$

$x(u,v)$, $y(u,v)$

$$\frac{df}{d(u,v)} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \frac{dx}{d(u,v)} + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \frac{dy}{d(u,v)}$$

Alternative Schreibweise:

$$g(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{bmatrix}$$ $\to$ "Vektorfeld", da 2 Outputs

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto f(x,y)$

d.h.: $f \circ g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, $(u,v) \to (f \circ g)(u,v)$

$$(u,v) \xrightarrow{g} \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{bmatrix} \xrightarrow{f} f(x,y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d(f\circ g)(u,v)}{d(u,v)} = \frac{d f(g(u,v))}{d g(u,v)} \cdot \frac{d g(u,v)}{d(u,v)}}$$

(analog zum 1D Fall: $\left[f(g(x))\right]' = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$)

$$\frac{df}{dg(u,v)} = \frac{df}{d(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dg}{d(u,v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Neu ist nur, dass die Ableitungen nun aus Jacobi-Matrizen bestehen, und dementsprechend Matrix Mult. vorkommen können.

$$\frac{d(f\circ g)(u,v)}{d(u,v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{bmatrix} + \frac{\partial f}{\partial y}\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\frac{df}{d(u,v)} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \frac{dx}{d(u,v)} + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \frac{dy}{d(u,v)}$$ | Von oben

$\leadsto$ Stimmt also mit unserer alten Formel überein!

Bsp: Betrachte die Abbildungen

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ x^2+y^2-1 \end{bmatrix}$$

$$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto x^2+y^2+z^2$$

Berechne $d(g \circ f)$ ohne und mit der Kettenregel.

Bem.: Lasst euch nie von den Variabelnamen verwirren, in beiden Funktionen haben wir x, y & z, aber durch die Verkettung ist das x von g nun $x+y$! Falls ihr Schwierigkeiten mit solchen Dingen habt, benennt einfach einen Variabelsatz um, z.B. auf u, v, w.

1. Ohne Kettenregel:

Wir bestimmen

$$\begin{aligned} g \circ f = g(f(x,y)) &= g(x+y,\, x-y,\, x^2+y^2-1) \\ &= (x+y)^2 + (x-y)^2 + (x^2+y^2-1)^2 \\ &= \cancel{x^2} + 2\cancel{x}y + \cancel{y^2} + \cancel{x^2} - 2\cancel{x}y + \cancel{y^2} + x^4 + y^4 + 1 + 2x^2y^2 - 2\cancel{x^2} - 2\cancel{y^2} \\ &= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 1 = (x^2+y^2)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(g \circ f) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4x^3 + 4xy^2 & 4y^3 + 4x^2y \end{bmatrix}}}$$

2. Mit Kettenregel:

$$d(g\circ f) = \frac{d}{d(x,y)}\, g(f(x,y)) = \frac{d}{df}\, g(f(x,y)) \cdot \frac{d}{d(x,y)}\, f(x,y)$$

mit $\frac{d}{df}\, g(f(x,y)) = \frac{d}{d(x,y,z)}\, g(x+y,\, x-y,\, x^2+y^2-1)$

$$= \underline{\begin{bmatrix} 2(x+y) & 2(x-y) & 2(x^2+y^2-1) \end{bmatrix}}$$

Bem: Hier dürft ihr keinesfalls vergessen, $f(x,y)$ für (x,y,z) einzusetzen – typische Fehler!

$$\frac{d}{d(x,y)}\, f(x,y) = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow d(g\circ f) = \begin{bmatrix} 2(x+y) & 2(x-y) & 2(x^2+y^2-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(x+y) + 2(x-y) + 4x(x^2+y^2-1) & 2(x+y) - 2(x-y) + 4y(x^2+y^2-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4x(x^2+y^2) & 4y(x^2+y^2) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4x^3 + 4xy^2 & 4y^3 + 4yx^2 \end{bmatrix}}}$$

Nachtrag Taylorreihe & -polynom sowie -fehler

Die ganze Theorie zur Thematik findet sich in den Tipps zur Serie 4, hier rechne ich noch ein Beispiel mit reichlich Kommentar.

Bem: Die Fehlerabschätzung wird nicht behandelt, da diese analog zu Analysis 1 gehandhabt werden muss (und ich nirgends ein passendes Beispiel fand).

Bsp: Wir betrachten eine Funktion in drei Variablen, um die allgemeine Taylorpolynomformel ausnutzen zu können:

Berechne das Taylorpolynom 2. Ordnung von

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2xyz$$

an der Stelle $a=(0,0,0)$.

Wir wissen, dass

$$T_p f(x,a) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} d^{(k)} f(a)(x-a)^k$$

$$= f(a) + \underbrace{df(a)(x-a)}_{=\langle \nabla f(a), (x-a)\rangle} + \underbrace{\frac{1}{2} D^{(2)} f(a)(x-a)^2}_{=\frac{1}{2}(x-a)^T H_f(a)(x-a)} + \ldots$$

$$= f(a) + Df(a)(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^T H_f(a)(x-a) + \dots$$

wobei $H_f(a)$ die Hesse(sche) Matrix ist, für welche

$$H_f(x) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x)\right)_{i,j=1,\dots,n} = \nabla \cdot df(x) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f & \dots & \partial_{x_n} f \end{bmatrix}$$

$\nabla \mathrel{\hat{=}}$ Nabla-Operator

$$= \begin{bmatrix} \partial_{x_1}\partial_{x_1} f & \partial_{x_1}\partial_{x_2} f & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{x_n} f \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n}\partial_{x_1} f & \cdots & \cdots & \partial_{x_n}\partial_{x_n} f \end{bmatrix}$$

gilt. $H_f(x)$ ist die zweite Ableitung $d^2 f$ von f.

Wir berechnen für die Formel also

$$\partial_x f = \underline{2x - 2yz}, \quad \partial_y f = \underline{2y - 2xz}, \quad \partial_z f = \underline{2z - 2xy}$$

$$\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f = \underline{-2z}, \quad \partial_x \partial_z f = \partial_z \partial_x f = \underline{-2y}, \quad \partial_y \partial_z f = \partial_z \partial_y f = \underline{-2x}$$

Satz von Schwarz?

$$\partial_x^2 f = \partial_y^2 f = \partial_z^2 f = \underline{2}$$

$$\Rightarrow df(a) = \begin{bmatrix} \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \end{bmatrix}\Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$H_f(a) = \begin{bmatrix} \partial_x^2 f & \partial_x\partial_y f & \partial_x\partial_z f \\ \partial_y\partial_x f & \partial_y^2 f & \partial_y\partial_z f \\ \partial_z\partial_x f & \partial_z\partial_y f & \partial_z^2 f \end{bmatrix}\Bigg|_{(x,y,z)=(0,0,0)} = \underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow T_2 f[(x,y,z),(0,0,0)] = \underbrace{f(0,0,0)}_{0} + \overbrace{df(0,0,0)\begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{bmatrix}}^{0}$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{x^2+y^2+z^2}}$$

Bem: Hätte man von Beginn an sehen können, da wir eine quadratische Annäherung in jeder Variable machen, somit fällt einfach der kubische Term $-2xyz$ weg.

$\rightsquigarrow$ Frage an euch: Was wäre die Taylorreihe von $f(x,y,z)$? (Analog zu Analysis I ...)